Wolfgang Ratzinger

Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht

unter Berücksichtigung verschiedener Exaktheitsniveaus und Visualisierungsformen.

1. Zum Beweisbegriff

Die Beschäftigung mit Beweisen vermittelt eine für die Mathematik grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweise und Denkvorstellung. Beweise scheinen sogar für die Mathematik geradezu typisch zu sein. Trotzdem führen sie in der Praxis des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen eine eher untergeordnete Rolle. Meist wird als Grund für diesen Umstand angegeben, daß Beweise für Schüler zu schwierig seien. Dies scheint zu stimmen, wenn man dabei vor allem an das Finden von Beweisen denkt. Oft ist jedoch eine sehr eingeschränkte, meist strenge Vorstellung der Lehrenden vom Beweisbegriff die Ursache dafür. Für eine sinnvolle Beschäftigung mit Beweisen scheint eine umfassende Sicht dessen, wie man Beweisen im Unterricht behandeln kann sowie ein differenziertes Verständnis dessen, was ein Beweis in der Mathematik ist und welche "Schattierungen" es davon gibt, notwendig zu sein.

Über den Beweisbegriff selbst gibt es derzeit keine einheitlichen Vorstellungen. Er hat in der Umgangssprache verschiedene Bedeutungen, in den verschiedenen Wissenschaften wird er nicht in gleicher Weise verwendet, ja sogar innerhalb der Mathematik wird im allgemeinen nicht mit einem eindeutig definierten Beweisbegriff gearbeitet.

Dort, wo das "Beweisen" gelernt werden soll (etwa in der AHS, aber auch in den Einführungsveranstaltung der Universitäten), scheint es günstig zu sein, den Beweisbegriff noch weiter zu fassen, als in der Fachwissenschaft üblich, da auch Fragen einer pädagogischen Legitimation und lernpsychologische Überlegungen zu berücksichtigen sind, sodaß Beweise in sehr unterschiedlichen Ausprägungen auftreten können.

Am klarsten scheint die Situation in der Universitätsmathematik zu sein. Hier ist das Bild des Beweisens relativ scharf umrissen. Es geht im Prinzip darum, einen Sachverhalt gemäß gewisser Standards zu begründen. Die Standards betreffen insbesondere

- die Ausführlichkeit der Beweisführung,
- die Darstellung der dem Beweis zugrundeliegenden Theorie.

Dabei können diese Standards allerdings in verschiedenen mathematischen Disziplinen unterschiedlich ausfallen.

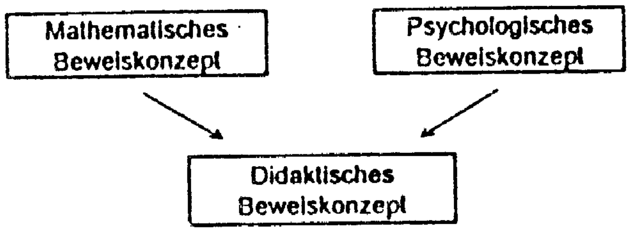
Nach einem Vorschlag von M. Stein[1] kann man die Summe aller mathematischen "Vereinbarungen zum Beweisen" als **mathematisches Beweiskonzept** bezeichnen.

Auch in der Schulmathematik der allgemeinbildenden Schulen sind solche Standards notwendig. Hier genügt es allerdings nicht, allein ein mathematisches Beweiskonzept festzulegen. Es muß noch zusätzlich darauf eingegangen werden,

- auf welche Art den Schülern "das Beweisen" vermittelt werden soll,
- wie bestimmte Beweise vermittelt werden sollen,
- wie Beweisverständnis überprüft werden soll, usw.

Diese und ähnliche Fragen führen zur Problematik eines psychologischen Beweiskonzeptes.

Bezeichnet man das bei der unterrichtlichen Behandlung des Beweisens zum Tragen kommende Konzept als didaktisches Beweiskonzept, so muß sich dieses Beweiskonzept aus der Festlegung eines mathematischen Beweiskonzeptes und der Festlegung eines psychologischen Beweiskonzeptes zusammensetzen.



2. Mathematische Beweiskonzepte

2.1. Dimensionen zur Erfassung mathematischer Beweiskonzepte

M. Stein hat in seinem oben erwähnten Werk einen Weg vorgeschlagen, wie man mathematische Beweiskonzepte miteinander vergleichen kann. Dabei sind die Konzeptionen zum Beweisen bezüglich zweier Dimensionen zu untersuchen:

- bezüglich der Explizitheit und
- bezüglich der Abstraktheit.

Die Explizitheit eines Beweises gibt an, wie "vollständig" ein Beweis geführt ist. Extreme sind etwa die "mathematisch-logische Theorie" einerseits (jede Einzelheit einer Theorie wird eindeutig festgelegt) bzw. eine "richtige Argumentation" andererseits (es wird nur mehr eine als richtig angesehene Argumentation angegeben). Viele Beweiskonzepte - insbesondere jene, die im allgemeinbildenden Schulwesen relevant sind - sind zwischen diesen beiden Extremen anzusiedeln.

Die Abstraktheit eines Beweises gibt an, wie groß der Anwendungsbereich der Theorie des Beweises ist, etwa, ob sich ein bestimmter Teilbarkeitsbeweis nur auf ganze Zahlen bezieht oder ob er gleich für Integritätsringe geführt wird. Die Abstraktheit eines Beweiskonzeptes beinhaltet als wesentlichen Bestandteil die Allgemeinheit einer bestimmten Theorie.

2.2. Der Begriff des Beweisens auf verschiedenen Explizitheits- und Abstraktionsniveaus

Um Beweise bezüglich der Begriffe Explizitheit und Abstraktheit miteinander vergleichen zu können, ist es günstig, auf den beiden Skalen "Explizitheit" und "Abstraktheit" diskrete Niveaus zu definieren:

Niveaus auf der Skala "Explizitheit":

- **Das Niveau der mathematisch-logischen Theorie.**
  Alle Einzelheiten der Theorie sind eindeutig festgelegt.
- **Das Niveau der mathematischen Theorie.**
  Die als zentral angesehenen Einzelheiten einer Theorie sind eindeutig festgelegt.
- **Das Niveau der lokal geordneten Theorie.**
  Die zum Führen bestimmter vorgegebener Beweise notwendigen Einzelheiten der Theorie sind eindeutig festgelegt.
- **Das Niveau der Alltagstheorie.**
  Die Einzelheiten der Theorie sind nicht eindeutig festgelegt, sondern müssen aus dem Kontext erschlossen werden.

Niveaus auf der Skala "Abstraktheit":

- **Abstraktes Niveau**
  Alle Begriffe sind sehr allgemein gehalten und können auf viele Arten interpretiert werden, daraus ergibt sich ein großer Anwendungsbereich.
- **Konkretes Niveau**
  Alle Begriffe haben eine festgelegte konkrete Bedeutung, sie sind daher nur in einem sehr engen Anwendungsbereich einsetzbar.

2.2.1. Das Niveau der mathematisch-logischen Theorie

Allgemeine Charakteristika des Niveaus der mathematisch-logischen Theorie:

Ein typisches Charakteristikum eines auf diesem Niveau geführten Beweises ist eine größtmögliche Voraussetzungslosigkeit. Im Extremfall wird der "mathematische Kosmos" bis ins kleinste Detail explizit angegeben und seine Zusammensetzung aus kleinsten sprachlichen Partikeln genau beschrieben. Der Beweis ist ein gemäß den Schlußregeln und Axiomen exakt durchkonstruiertes Gebilde. Es dürfen insbesondere keine Schritte enthalten sein, die nicht aufgrund der Axiome und Schlußregeln zu rechtfertigen sind.

Beispiel 1:
Der Beweis des Assoziativgesetzes für die Addition natürlicher Zahlen nach LANDAU[2] (in einer etwas veränderten Fassung).

Gegeben sei eine Menge N von Dingen, natürliche Zahlen genannt, mit den folgenden Eigenschaften, Axiome genannt:

Axiom 1: 1 ist eine natürliche Zahl.
Axiom 2: Zu jedem a gibt es genau eine natürliche Zahl, die der Nachfolger von a heißt und mit a' bezeichnet werden möge.
Axiom 3: Stets ist $a' \neq 1$
Axiom 4: Aus $a' = b'$ folgt $a = b$
Axiom 5: (Induktionsaxiom): Es sei M eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften:
1) 1 gehört zu M.
2) Wenn a zu M gehört, so gehört auch a' zu M.
Dann umfaßt M alle natürlichen Zahlen.

Satz 1:
$\forall a \in N: a \neq b \Rightarrow a' \neq b'$

Beweis:
Indirekt: Wäre $a' = b'$, so wäre nach Axiom 4 $a = b$

Satz 2:
$\forall a \in N: a' \neq a$

Beweis:
Sei $M = \{a \mid a' \neq a\}$
1) $1 \in M$, denn nach Axiom 1 und Axiom 3 gilt: $1' \neq 1$
2) Wenn $a \in M$, d.h. $a' \neq a$
dann gilt nach Satz 1: $(a')' \neq a'$
d.h., $a' \in M$.
Aus 1) und 2) folgt daher nach Axiom 5: $M = N$.

Satz 3:
$\forall a \in N$: Ist $a \neq 1$, so gibt es ein $u \in N$ mit $a = u'$
(d.h. jede natürliche Zahl $a \neq 1$ hat einen "Vorgänger").

Beweis:
Sei $M = \{1\} \cup \{a \in N \mid \exists u \in N: a = u'\}$ (Bem.: $a \neq 1$ nach Axiom 3)
1) $1 \in M$ aufgrund der obigen Festlegung
2) $a \in M$, d.h. es gibt ein u mit $a = u'$
dann folgt nach Axiom 2: $a' = (u')'$
daher gilt also auch: $a' \in M$
Nach Axiom 5 gilt also: $M = N$.

Satz 4:
Jedem Zahlenpaar $(a,b) \in N \times N$ läßt sich genau eine natürliche Zahl $a+b$ so zuordnen, daß
1) $a+1 = a'$ für jedes a,
2) $a+b' = (a+b)'$ für jedes a und jedes b.

(Definition 1: $a+b$ heißt die Summe von a und b bzw. die durch Addition von b zu a entstehende Zahl).

Beweis:

α) Zuerst zeigen wir, daß es zu jedem festen a **höchstens eine** Möglichkeit gibt, $a+b$ so zu definieren, daß
$a+1 = a'$ und
$a+b' = (a+b)'$ für jedes b.

Seien etwa n_b und m_b zwei natürliche Zahlen, die für alle b definiert sind und für die gilt:
(1) $n_1 = a'$ und $m_1 = a'$
(2) $n_{b'} = (n_b)'$ und $m_{b'} = (m_b)'$ für jedes $b \in N$

Sei $M = \{b \in N \mid n_b = m_b\}$
1) $1 \in M$, da $n_1 = a'$ und $m_1 = a'$ und daher $n_1 = m_1$
2) Wenn $b \in M$, d.h. $n_b = m_b$
dann gilt nach Axiom 2:
$(n_b)' = (m_b)'$
und nach (2): $n_{b'} = (n_b)' = (m_b)' = m_{b'}$
also gilt auch: $b' \in M$

Es ist daher $M = N$.

β) Andererseits wollen wir nun zeigen, daß es zu jedem a **mindestens eine** Möglichkeit gibt, $a+b$ so zu definieren, daß
$a+1 = a'$ und
$a+b' = (a+b)'$ für jedes b:

Sei M die Menge aller a, zu denen es eine solche Möglichkeit gibt.
1) Wenn $a=1$, dann erfüllt $a+b = b'$ die gewünschte Bedingung, denn setzt man in die Bedingung $a+b = b'$ für b die Zahl 1 ein, so erhält man
$a+1 = 1'$
nach Axiom 2 gilt: $1' = a'$ (da ja $a = 1$)
und somit gilt: $a+1 = a'$

Setzt man in die Bedingung $a+b = b'$ für b die Zahl b' ein, so erhält man $a+b' = (b')'$
Es gilt nun:
$b' = a+b$ laut Voraussetzung
$(b')' = (a+b)'$ nach Axiom 2
und somit: $a+b' = (a+b)'$

Es gilt daher: $1 \in M$.

2) Sei $a \in M$, d.h. es gibt mindestens ein $a+b$ mit
$a+1 = a'$ und
$a+b' = (a+b)'$ für jedes b,

dann erfüllt $a'+b = (a+b)'$
die gewünschte Bedingung bei a', denn
setzt man in $a'+b = (a+b)'$ für b die Zahl 1 ein, so erhält man: $a'+1 = (a+1)'$
Außerdem gilt:
$a+1' = a'$ laut Voraussetzung
$(a+1)' = (a')'$ nach Axiom 2
und somit: $a'+1 = (a')'$

Setzt man in $a'+b = (a+b)'$ für b die Zahl b' ein, so erhält man: $a'+b' = (a+b')'$
Außerdem gilt:
$a+b' = (a+b)'$ laut Voraussetzung
$(a+b')' = ((a+b)')'$ nach Axiom 2
und, da $(a+b)' = a'+b$
$((a+b)')' = (a'+b)'$ nach Axiom 2
und somit: $a'+b' = (a'+b)'$

Es gilt also auch: $a' \in M$.

Somit gilt: $M = N$

Satz 5: (Assoziativgesetz der Addition)
$\forall a,b,c \in N: (a+b)+c = a+(b+c)$

Beweis:
Seien a und b beliebig aus N, dann aber fest und sei $M = \{c \in N \mid (a+b)+c = a+(b+c)\}$.

1) $1 \in M$, denn
$(a+b)+1 = (a+b)'$ nach Satz 4
$(a+b)' = a+b'$ nach Satz 4
$a+b' = a+(b+1)$ nach Satz 4
also: $(a+b)+1 = a+(b+1)$

2) Ist $c \in M$, d.h. $(a+b)+c = a+(b+c)$, dann gilt:
$(a+b)+c' = ((a+b)+c)'$ nach Satz 4
$(a+b)+c = a+(b+c)$ laut Voraussetzung
$((a+b)+c)' = (a+(b+c))'$ nach Axiom 2
$(a+(b+c))' = a+(b+c)'$ nach Satz 4
$a+(b+c)' = a+(b+c')$ nach Satz 4
Also $(a+b)+c' = a+(b+c')$
und somit gilt auch: $c' \in M$.

Es ist daher $M = N$.

Bemerkung: Das abstrakte Niveau der mathematisch-logischen Theorie (auch als formal-logische Theorie bezeichnet) zeichnet sich dadurch aus, daß auch noch die erlaubten (logischen) Schlußregeln angegeben werden. Eine Steigerung des formalen Aufbaus von Landau in diesem Sinne kommt etwa vor in:
PRAWITZ, D.: "Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study", Stockholm, Göteborg, Uppsala 1965.
TROELSTRA, A.S.: "Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis", Berlin, Heidelberg, New York 1973.

2.2.2. Das Niveau der mathematischen Theorie

Allgemeine Charakteristika des Niveaus der mathematischen Theorie:
Mathematische Theorien stellen wie mathematisch-logische Theorien eigenständige Gebilde dar, die den einzelnen in ihr geführten Beweisen vorgeordnet sind. Im Gegensatz zur mathematisch-logischen Theorie ist eine mathematische Theorie jedoch üblicherweise nur in einem eingeschränkten Bereich vollständig und explizit. Nur die als zentral für die Theorie-Entwicklung angesehenen Begriffe, Axiome und Beweisteile werden einwandfrei beschrieben. Alles, was für "mathematisches Allgemeinwissen " gehalten wird, wird als "bekannt vorausgesetzt".

- Die Sprache stützt sich stets auf eine als bereits gegeben angesehene "Grundsprache" der Gemeinschaft aller Mathematiker.
  Begriffe, bei denen Konsens bezüglich ihrer Bedeutung vermutet wird, werden nicht mehr explizit erklärt, sondern einfach bei Bedarf benützt. Ihre Bedeutung ergibt sich also implizit aus der Art ihrer Verwendung. Es werden nur solche Begriffe explizit angegeben (und ggf. definiert), die für die jeweilige Theorie wichtig und "neu" sind. Diese Begriffe werden allerdings vollständig angegeben.

- Es werden nur solche Axiome und Definitionen angegeben, die für den Aufbau der jeweiligen Theorie wichtig sind, diese jedoch vollzählig. Logische Axiome werden i.a. nicht angegeben, sondern als bekannt vorausgesetzt.

- Bei den Schlußregeln wird auf einen Vorrat allgemein akzeptierter Schlußregeln zurückgegriffen. Jeder Schluß muß jedoch formal korrekt sein .

- Bei den Beweisen stützt man sich auf einen Konsens unter den Mathematikern über die Gestalt eines korrekten Beweises (so soll etwa ein Beweis nur von allgemeinen Axiomen der Theorie oder von bereits bewiesenen Sätzen ausgehen). Es werden nicht alle Beweisschritte exakt und vollständig aufgeschrieben. Allerdings wird vorausgesetzt, daß alle "Lücken" prinzipiell mit mathematisch korrekten Schlüssen gefüllt werden können.

Beispiel 2:
Der Beweis des Assoziativgesetzes der Addition ganzer Zahlen nach einem Konzept von R. Strehl[3].

Definition 1:
Zwei geordnete Paare (a/b) und (c/d) aus NxN heißen äquivalent (nach der Differenzengleichheit), wenn $a+d = b+c$.
$(a/b) \approx (c/d) \Leftrightarrow a+d = b+c$

Satz 6:
Die Relation $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Beweis:
(1) reflexiv:
$(a/b) \approx (a/b)$, weil $a+b = b+a$ nach Definition 1
(2) symmetrisch:
$(a/b) \approx (c/d) \Leftrightarrow a+d = b+c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c+b = d+a \Leftrightarrow (c/d) \approx (a/b)$ nach Definition 1
(3) transitiv:
Sei $(a/b) \approx (c/d) \wedge (c/d) \approx (e/f)$
dann ist nach Definition 1:
$a+d = b+c \wedge c+f = d+e$
$\Rightarrow (a+d)+(c+f) = (b+c)+(d+e)$ (*)
$\Leftrightarrow (a+f)+(d+c) = (b+e)+(c+d)$
$\Leftrightarrow a+f = b+e$
$\Leftrightarrow (a/b) \approx (e/f)$
(*) (hier werden entsprechende Eigenschaften der natürlichen Zahlen verwendet)

Da also die Relation $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist, liefert sie eine Klasseneinteilung von NxN. Die Menge aller derartigen Klassen heißt Menge Z der ganzen Zahlen.

Definition 2:
$[a/b] := \{(x/y) \mid (x/y) \in N \times N \wedge (x/y) \approx (a/b)\}$
Die Menge aller dieser Klassen heißt Menge Z der ganzen Zahlen.

Definition 3: (Definition der Addition)
$[a/b] \oplus [c/d] := [a+c/b+d]$

Satz 7:
Die durch obige Definition erklärte Addition ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten.

Beweis:
Sei $[a_1/b_1] = [a_2/b_2] \wedge [c_1/d_1] = [c_2/d_2]$,
dann gilt:
$a_1+b_2 = b_1+a_2 \wedge c_1+d_2 = d_1+c_2$ nach Definition 1
$\Rightarrow (a_1+b_2) + (c_1+d_2) = (b_1+a_2) + (d_1+c_2)$ (*)
$\Rightarrow (a_1+c_1) + (b_2+d_2) = (b_1+d_1) + (a_2+c_2)$ (*)
$\Rightarrow [a_1+c_1/b_1+d_1] = [a_2+c_2/b_2+d_2]$ nach Definition 1
$\Rightarrow [a_1/b_1] \oplus [c_1/d_1] = [a_2/b_2] \oplus [c_2/d_2]$
nach Definition 3

(*) (Anwendung entsprechender Eigenschaften der natürlichen Zahlen)

Satz 8:
Die Addition in Z ist assoziativ.

Beweis:
$([a/b] \oplus [c/d]) \oplus [e/f] = [a+c/b+d] \oplus [e/f]$ nach Definition 3
$= [(a+c)+e/(b+d)+f]$ nach Definition 3
$= [a+(c+e)/b+(d+f)]$ Assoziativgesetz in N
$= [a/b] \oplus [c+e/d+f]$ nach Definition 3

$= [a/b]\oplus([c/d]\oplus[e/f])$ nach Definition 3

Diskussion des dargestellten Vorgehens:

- Die für die Beweisführung zentralen Begriffe werden einwandfrei definiert, etwa die Äquivalenz zweier Zahlenpaare, die Äquivalenzklassen und die Addition ganzer Zahlen. Es werden allerdings nur die "neuen" Begriffe definiert. Die Kenntnis der Begriffe reflexiv, symmetrisch, transitiv, Klasseneinteilung und assoziativ wird vorausgesetzt.
- Auch die zentralen Sätze werden bewiesen, vor allem die Sätze 6 und 8, wobei sich die Beweise auf Definitionen oder bereits bewiesene Sätze stützen. Es werden allerdings nicht mehr alle verwendeten Sätze bewiesen, etwa die verwendeten Sätze über Eigenschaften natürlicher Zahlen. Es werden auch nicht alle Beweisschritte exakt und vollständig aufgeschrieben, etwa bei der Umformung:

  $(a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e) \Leftrightarrow (a+f)+(d+c)=(b+e)+(c+d)$

  Diese "Beweislücke" kann allerdings bei Bedarf mit korrekten Schlüssen gefüllt werden.

2.2.3. Das Niveau der lokal geordneten Theorie

Allgemeine Charakteristika des Niveaus der lokal geordneten Theorie:
Im Gegensatz zur mathematischen Theorie, bei der zentrale Begriffe, Axiome, Definitionen, Schlußregeln und Beweise noch exakt gefaßt wurden, steht bei der lokal geordneten Theorie nur mehr ein Beweis oder eine Reihe von Beweisen im Vordergrund.

Beispiel 3:
Given a positive integer $n>3$. Prove, that the least common multiple of the products $x_1x_2x_3 \ldots x_k$ ($k\geq 1$), whose factors x_i are positive integers with $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k\leq n$, is less than $n!$.[4]

Beweis:
We propose to prove that the least common multiple of the numbers in question is

$$\prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$$

where the product is extended over all primes. Applying LEGENDREs well-known formula

$$n! = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots}$$

to that result, we readily obtain the solution of our problem. (Namely, for $n>3$, $\left[\frac{n}{p^2}\right]\geq 1$).

Take an arbitrary product $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k$, an arbitrary prime p and let $p^{\alpha_i} \mid x_i \wedge \neg(p^{\alpha_i+1} \mid x_i)$

Evidently, $\sum_{i=1}^{k} p^{\alpha_i} \leq n$ and by the inequality $p^{\alpha}\geq \alpha p$ we have

$$p\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \leq n, \text{ i.e. } \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \leq \left[\frac{n}{p}\right]$$

Hence it follows that the exponent of an arbitrary p does not exceed $\left[\frac{n}{p}\right]$ in any product. But there exists a product in which the exponent of p is exactly $\left[\frac{n}{p}\right]$; this is apparent by choosing $k=\left[\frac{n}{p}\right]$ and $x_1=x_2=\ldots=x_k=p$. Hence, the least common multiple of the product in question is indeed $\prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]}$.

Diskussion des dargestellten Vorgehens

- Die Sprache stützt sich hier auf die Sprache einer speziellen mathematischen Theorie. Eine genaue Explikation der verwendeten Begriffe bzw. der zulässigen Ausdrücke unterbleibt. So wird etwa angenommen, daß die Symbole für die Summen- und Produktbildung, sowie das Symbol für die Gaußklammerfunktion bekannt ist und von allen Lesern in gleicher Art verstanden wird. Außerdem wird vorausgesetzt, daß in der Formel

  $$n! = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots}$$

  allen Lesern klar ist, welche Bedeutung die drei Punkte ... im Exponenten besitzen. Eine genauere Erklärung der Eigenschaft dieses Exponenten, nämlich, daß

  1) in den Ausdrücken $\left[\frac{n}{p}\right]$, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ die Potenzen von p mit der Folge der natürlichen Zahlen wachsen sollen und

2) kein letzter Summand dieser Reihe angegeben werden braucht, weil die Ausdrücke $\left[\frac{n}{p^s}\right]$ von einem bestimmten s an (nämlich, wenn $p^s>n$) ohnehin gleich Null sind, fehlt.

- Es werden keine Axiome angegeben. Implizit sind alle solchen Aussagen Axiome, die für einen speziellen Beweis "kritiklos" (weil "inhaltlich klar") übernommen werden. So macht der oben angeführten Beweis zwei implizite Voraussetzungen:
  1.) die "well-known" Formel von LEGENDRE

$$n! = \prod_p p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots},$$

  wobei p alle Primzahlen durchläuft.
  2.) Die Ungleichung $p^\alpha \geq \alpha p$ für $\alpha \in N$ und p prim.

- Es werden nur die unbedingt notwendigen Begriffe explizit definiert. Dabei bedeutet "Definieren" nicht immer ein "Definieren im mathematischen Sinne", sondern es kann auch (auf konkretem Abstraktionsniveau) eine "Definition" gegeben werden, die aus mehreren Beispielen zum intendierten Begriff besteht (etwa Definition des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen aus Beispielen).

- Neben den logisch korrekten Schlüssen können auch solche heuristischer Art vorkommen. Es ist denkbar, daß aus einigen konkreten Beispielen auf eine größere Gesamtheit geschlossen wird, wie dies etwa bei der "unvollständigen Induktion" der Fall ist.

- Es gibt keine explizite formale Festlegung, welche sprachlichen Gebilde Beweise sind und welche nicht. Die für die "Idee" relevanten Schritte werden relativ exakt bewiesen, Sachverhalte, die nicht im Zentrum des Interesses stehen, können unbewiesen bleiben.

2.2.4. Das Niveau der Alltagstheorie

Allgemeine Charakteristika des Niveaus der Alltagstheorie:

- Die Sprache ist im allgemeinen die Umgangssprache, angereichert mit den für die jeweilige Problemstellung typischen und relevanten Begriffen (etwa die Begriffe "durchgezogenen Verbindungslinie" oder "strichlierte Verbindungslinien" im Beispiel 4).

- Axiome werden nicht direkt angegeben. Im Problem stecken allerdings häufig Grundannahmen, die i.a. stillschweigend benützt werden.

- Definitionen kommen i.a. nicht vor. Die Begriffe entstammen einer problemtypischen Umgangssprache. Es wird angenommen, daß alle angesprochenen Partner diese beherrschen.

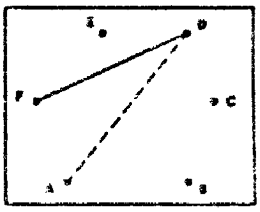
- Schlußregeln werden explizit nicht angegeben. Implizit werden neben logisch korrekten auch manchmal heuristische Schlüsse verwendet.

- "Beweise" stellen sich als Folge umgangssprachlicher Argumentationsschritte dar. Unzulässig sind solche Beweise, die speziellen Bedingungen des Problems verletzen oder nachweislich falsche Voraussetzungen benutzen.

Beispiel 4:
Zwei Personen kennen sich, wenn jeder den anderen kennt. Andernfalls wollen wir sagen, daß sie sich nicht kennen.
Es werde eine beliebige Menge von sechs Personen herausgegriffen. Man zeige, daß unter ihnen drei vorkommen, die sich gegenseitig kennen oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.[5]

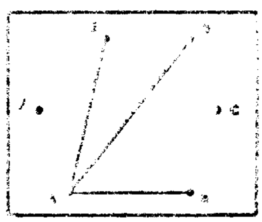
Beweis:

Wir denken uns die sechs Personen durch sechs Punkte veranschaulicht. Wenn sich zwei Personen kennen, dann wollen wir die zwei Punkte durch eine durchgezogene Linie verbinden (wie z.B. F und D). Wenn zwei Personen sich nicht kennen, dann verbinden wir die zwei Punkte durch eine strichlierte Linie (wie z.B. A und D).



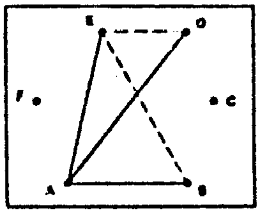
Es ist nun jeder Punkt mit jedem anderen entweder mit einer durchgezogenen oder mit einer strichlierten Linie zu verbinden. Dabei ist zu zeigen, daß unter den entstehenden Dreiecken entweder ein Dreieck aus lauter durchgezogenen oder ein Dreieck aus lauter strichlierten Linien entsteht.

Von jedem der sechs Punkte gehen fünf Verbindungslinien aus. Unter diesen fünf Verbindungslinien gibt es mindestens drei der gleichen Art (also entweder durchgezogen oder strichliert).

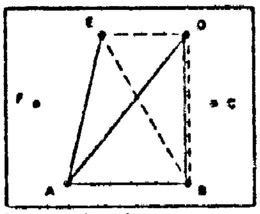


Gäbe es nämlich keine drei Linien der gleichen Art, also höchstens zwei, dann wären unter diesen Voraussetzungen höchstens vier (2·2) Verbindungslinien möglich. Die fünfte Verbindungslinie würde dann eine dritte Verbindungslinie der gleichen Art erzeugen.

Die drei Linien der gleichen Art (in der Zeichnung rechts durchgezogen) enden in den Endpunkten eines Dreiecks (hier B,D,E). Nun muß man die Punkte B und E mit einer strichlierten Linie verbinden, da man sonst ein Dreieck aus durchgezogenen Linien erhält (A,B,E). Analog muß man E und D mit einer strichlierten Linie verbinden.



Verbindet man nun B und D mit einer strichlierten Linie, so erhält man ein Dreieck aus strichlierten Verbindungslinien (B,D,E), verbindet man B und D jedoch mit einer durchgezogenen Linie, so erhält man ein Dreieck aus durchgezogenen Verbindungslinien (A,B,D).



2.2.5. Beispiele zur Dimension "Abstraktheit" auf dem Niveau mathematischer Theorie

Beispiel für die Behandlung des euklidischen Algorithmus auf abstraktem Niveau nach HORNFECK:[6]

Beispiel 5:
Es sei E ein euklidischer Ring[7] mit der Wertfunktion w. Wir wollen einen ggT zweier von Null verschiedener Elemente $a_1, a_2 \in E$ ermitteln. Wir bilden:

$$
\begin{array}{ll}
a_1 = q_1 a_2 + a_3 & w(a_2) > w(a_3) \\
a_2 = q_2 a_3 + a_4 & w(a_3) > w(a_4) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
a_{m-1} = q_{m-1} a_m + a_{m+1} & w(a_m) > w(a_{m+1}) \\
a_m = q_m a_{m+1} &
\end{array}
$$

Dabei ist a_{m+1} der letzte nicht verschwindende Divisionsrest. Da $w(a_2) > w(a_3) > w(a_4) > w(a_5) > \cdots$, kommt der Prozeß nach endlich vielen Schritten zum Stillstand.

Behauptung: a_{m+1} ist ein ggT der Elemente a_1 und a_2.

Beweis:
1) Wir zeigen zuerst, daß a_{m+1} ein Teiler von a_1 und a_2 ist.
Aus der letzten Zeile folgt $a_{m+1} \mid a_m$. In der vorletzten Zeile kann man also rechts a_{m+1} herausheben und erhält $a_{m+1} \mid a_{m-1}$. Nun kann man auch in der drittletzten Zeile rechts a_{m+1} herausheben und in dieser Weise fortfahren, bis man schließlich erhält: $a_{m+1} \mid a_2$ und $a_{m+1} \mid a_1$.
2) Sei d ein Teiler von a_1 und a_2, so bleibt zu zeigen: $d \mid a_{m+1}$.
Da $a_3 = a_1 - q_1 a_2$ und d rechts herausgehoben werden kann, gilt also: $d \mid a_3$. Aus der umgeformten zweiten Zeile $a_4 = a_2 - q_2 a_3$ folgt, daß $d \mid a_4$.

Als nächstes ergibt sich $d \mid a_5$, schließlich $d \mid a_{m+1}$.

Beispiel für die Behandlung des euklidischen Algorithmus auf konkretem Niveau[6]:

Beispiel 6:
Gesucht ist der ggT von 1632 und 833. Man geht folgendermaßen vor:

1632 : 833 = 1 799	1632 = 833·1 + 799	(1)
833 : 799 = 1 34	833 = 799·1 + 34	(2)
799 : 34 = 23 17	799 = 34·23 + 17	(3)
34 : 17 = 2 0	34 = 17·2 + 0	(4)

Sobald 0 als Rest auftritt, bricht das Verfahren ab. Der letzte Rest ≠ 0 (in unserem Falle 17) ist der ggT., denn:
a) 17 ist ein gemeinsamer Teiler von 833 und 1632, da 17 nach (4) in 34 enthalten ist, nach (3) auch in 799, nach (2) auch in 833 und nach (1) auch in 1632.
b) 17 ist aber auch der größte gemeinsame Teiler, da jeder gemeinsame Teiler von 1632 und 833 nach (1) auch in 799 enthalten ist, nach (2) auch in 34 und nach (3) auch in 17.

Seien nun a und b positive ganze Zahlen:

Allgemeine Beschreibung:	Darstellung durch Gleichungen:	
$a : b = q_1$ r_1	$a = q_1 \cdot b + r_1$	(1)
$b : r_1 = q_2$ r_2	$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$	(2)
$r_1 : r_2 = q_3$ r_3	$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$	(3)
$r_2 : r_3 = q_4$ r_4	$r_2 = q_4 \cdot r_3 + r_4$	(4)
....	....	
$r_{k-2} : r_{k-1} = q_k$ r_k	$r_{k-2} = q_k \cdot r_{k-1} + r_k$	(k)
$r_{k-1} : r_k = q_{k+1}$ 0	$r_{k-1} = q_{k+1} \cdot r_k + 0$	(k+1)

Da $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_k$, muß einmal der Rest 0 auftre-

len, d.h. das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab (in unserem Fall nach k+1 Schritten).
Wir wollen nun beweisen, daß r_k der ggT von a und b ist, d.h. wir wollen zeigen, daß a und b Vielfache von r_k sind und daß keine größere Zahl als r_k Teiler sowohl von a als auch von b ist.

$$
\begin{array}{ll}
(k+1) & \Rightarrow r_k \mid r_{k-1} \\
(k) & \Rightarrow r_k \mid r_{k-2} \\
 & \dots\dots\dots\dots \\
(4) & \Rightarrow r_k \mid r_2 \\
(3) & \Rightarrow r_k \mid r_1 \\
(2) & \Rightarrow r_k \mid b \\
(1) & \Rightarrow r_k \mid a
\end{array}
$$

also ist r_k tatsächlich ein Teiler von a und von b.

Nehmen wir nun an, eine positive ganze Zahl d teile a und b.
Nach (1) teilt dann d auch r_1, nach (2) dann auch r_2, nach (3) auch r_3, ... und schließlich nach (k) auch r_k.
Jeder gemeinsame Teiler von a und b ist also ein Teiler von r_k. Es kann daher d nicht größer als r_k sein.
Also ist r_k der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Diskussion des dargestellten Vorgehens.

Die Konkretheit zeigt sich an drei Aspekten:
1. Durch das zunächst durchgerechnete Zahlenbeispiel wird der Bezug des Algorithmus zu konkreten Rechenprozessen der Zahlentheorie hergestellt.
2. Der Nachweis des Satzes erfolgt zunächst an einem Beispiel, das jedoch alle Züge eines vollständigen Beweises trägt.[9]
3. Der Beweis arbeitet mit der Eigenschaft des ggT als gemeinsamer Teiler, der von allen anderen gemeinsamen Teilern geteilt wird.

2.2.6. Beispiele zur Dimension "Abstraktheit" auf dem Niveau lokal geordneter Theorie

Demonstration am folgenden Beispiel:

Beispiel 7:
Ein Zusammenhang zwischen dem ggT und dem kgV zweier natürlicher Zahlen:

Seien a und b zwei natürliche Zahlen und seien

$a=\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$ und $b=\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\beta_i}$ die kanonischen Zerlegungen der beiden Zahlen, dann ist $(a,b)=\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ der größte gemeinsame Teiler von a und b und $[a,b]=\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b.

Behauptung: Zwischen diesen beiden Größen gilt die Beziehung: $(a,b)\cdot[a,b] = a\cdot b$

1) **Beweis dieser Behauptung auf einem abstrakten Niveau:**

$$(a,b)\cdot[a,b] = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} \cdot p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)+\min(\alpha_i,\beta_i)} = a\cdot b$$

2) **Beweis dieser Behauptung auf einem konkreten Niveau:**

Sei $a = 720 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$
und $b = 2646 = 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7$

Dabei ist $(720,2646) = 2\cdot3\cdot3$
und $[720,2646] = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7$

Nun ist unmittelbar einzusehen, daß

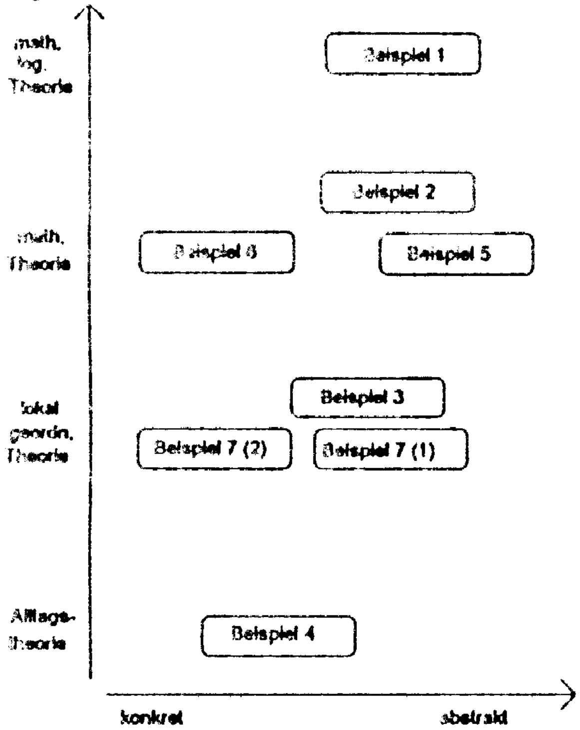
$$
\begin{aligned}
(720,2646)\cdot[720,2646] &= 2\cdot3\cdot3 \cdot 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7 \\
&= 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5 \cdot 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7 \\
&= 720\cdot2646
\end{aligned}
$$

Eine Argumentation mit konkreten Zahlen, die unmittelbar verallgemeinert werden kann, könnte etwa so lauten:

- Zur Bestimmung des ggT[10] der Zahlen 720 und 2646 multipliziert man die Primfaktoren mit der "geringeren Häufigkeit" miteinander (im obigen Beispiel fett gedruckt).
- Zur Bestimmung des kgV[11] der Zahlen 720 und 2646 multipliziert man die Primfaktoren mit der "größeren Häufigkeit" miteinander (im obigen Beispiel normal gedruckt).
- Bildet man nun das Produkt aus ggT und kgV, so kommen in diesem Produkt die Primfaktoren sowohl mit ihrer "geringeren", als auch mit ihrer "größeren" Häufigkeit vor. Das Produkt enthält daher sowohl alle Primfaktoren von 720 als auch alle Primfaktoren von 2646. Dieses Produkt entspricht somit dem Produkt der beiden Zahlen 720 und 2646.

2.3. ZUSAMMENFASSUNG

Abschließend kann der Versuch unternommen werden, die bisher vorgestellten Beweiskonzepte bezüglich der Dimensionen Explizitheit und Abstraktheit miteinander zu vergleichen und in einem "Koordinatensystem" übersichtlich darzustellen. Natürlich gestattet dieses Koordinatensystem keine absoluten Einordnungen durch wohldefinierte Kriterien. Eine Einordnung einer Theorie oder eines Beweises ist immer nur relativ zu einer anderen bereits eingeordneten möglich. Die Lage der erwähnten Beispiele im Koordinatensystem kann daher nur als ungefähre Lage bezeichnet werden.



3. Bemerkungen zu didaktischen Beweiskonzepten

3.1. Formen des Begründens

Vielen Schülern sind als Folge ihrer sonstigen Erfahrungen derart spezifische Formen des Überprüfens und Begründens, wie sie mathematische Beweise darstellen, relativ fremd. Sie werden oft als überflüssig oder nicht angemessen empfunden. Darüber hinaus fehlen vielen Schülern notwendige Qualifikationen im Formalisieren und logischen Schließen. Man sollte daher im voruniversitären Schulunterricht keine zu hohen Erwartungen hinsichtlich der Möglichkeiten haben, den Schülern weitreichende Fähigkeiten im Bereiche des Beweisens zu vermitteln. Dies belegen etwa Untersuchungen von Schupp[12] und Leppig[13]. Vor dem Hintergrund solcher Untersuchungsergebnisse stellt sich neben der Frage nach den Ursachen dieser geringen Erfolgsquote aber auch die Frage, in welchem Ausmaß spätere Lebenssituationen von "Nichtmathematikern" die Beschäftigung mit eher fachspezifischen Formen des Begründens notwendig machen. Für viele Schüler ist Mathematik ein Fach neben vielen anderen, in denen auch andere Formen des Begründens akzeptiert werden, als in der Mathematik üblich, etwa in den Naturwissenschaften, in der Philosophie oder im Religionsunterricht.

Solche verschiedenartigen Formen des Begründens, mit denen Schüler im Laufe ihrer Schulzeit konfrontiert sein können, sind etwa:[14]

- Berufung auf eine Autorität
  Etwa der Hinweis auf einen entsprechenden Text in einem Fachbuch.

- Deduktives Schließen
  d.h. Anführen von Aussagen, die als richtig angesehen werden und deren Richtigkeit hinreichend für die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage sind.

- Reduktives Schließen
  d.h. Anführen von Folgerungen aus der zu beweisenden Aussage A, die als richtig angesehen werden, deren Richtigkeit aber nicht hinreichend für die Richtigkeit von A sind.

- Induktives Schließen
  d.h. aus der Verifizierung einer Aussage an einzelnen Elementen einer Menge wird auf die Gültigkeit dieser Aussage für alle Elemente dieser Menge geschlossen.

- Anführen von Aussagen, die als richtig angesehen werden und deren Richtigkeit in einem gewissen, nicht deduktiven Zusammenhang mit der Richtigkeit der zu beweisenden Aussage stehen (z.B. Analogieschlüsse oder Wahrscheinlichkeitsaussagen).

In naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern lernen Schüler induktive und reduktive Schlußweisen kennen. So werden etwa naturwissenschaftliche Gesetze häufig durch Experimente "bewiesen", die diese Gesetze in Einzelfällen bestätigen (induktives Schließen) oder aus einer Theorie werden experimentell überprüfbare Folgerungen gezogen, aus deren Verifizierung auf die Richtigkeit der Theorie geschlossen wird (reduktives Schließen).

In der wissenschaftlichen Mathematik sind hingegen fast durchwegs nur deduktive Begründungen anerkannt. Eine Beschränkung auf diese Form des Begründens und damit verbunden eine Vermittlung weitreichender Qualifikationen des formalen Beweisens im Mathematikunterricht läßt sich allerdings erziehungswissenschaftlich nicht rechtfertigen (darauf werde ich im folgenden noch näher eingehen) und scheint auch nicht (siehe oben) so leicht erreichbar zu sein.[15]

3.2. DEDUKTIVISTISCHER ODER HEURISTISCHER ZUGANG?

Beweise im Schulunterricht, die sich auf dem Niveau einer mathematisch-logischen oder einer mathematischen Theorie befinden und nach der Euklidischen Methodenlehre streng deduktiv ablaufen, werden seit geraumer Zeit in ihrer didaktischen Sinnhaftigkeit stark kritisiert. Lakatos[16] bezeichnet diesen Stil, der mit einer sorgfältig zusammengestellten Liste von Axiomen, Hilfssätzen und Definitionen beginnt, denen dann in sorgfältiger Wortwahl die Sätze und jenen dann die Beweise folgen, als "deduktivistischen Stil". Lakatos kritisiert, daß die Axiome und Definitionen häufig gekünstelt und geheimnisvoll verwickelt erscheinen. Niemals wird mitgeteilt, wie diese Verwicklungen zustandekamen. Die Sätze sind meist beladen mit umständlichen Bedingungen, wobei es unmöglich erscheint, daß irgendjemand sie erraten hat.

Beim deduktivistischen Stil nach dem Euklidischen Ritual werden die Schüler praktisch verpflichtet, einer Darbietung eines Zauberkunststückes beizuwohnen. Alle Aussagen sind wahr, sämtliche Schlüsse sind gültig. Die Mathematik wird als dauernd wachsende Menge ewiger, unveränderlicher Wahrheiten dargestellt. Gegenbeispiele, Widerlegungen oder Kritik können kaum hereinbrechen. Durch die Eigenart, mit monstersperrenden und beweiserzeugten Definitionen und mit dem voll entfalteten Satz zu beginnen, unterdrückt man ursprüngliche Vermutungen, Widerlegungsversuche und die Kritik des Beweises und sichert dadurch dem Unterrichtsgegenstand einen autoritären Anstrich. Der deduktivistische Stil verbirgt den Kampf und das Abenteuer. Die Handlung verschwindet. "Die aufeinanderfolgenden tastenden Formulierungen des Satzes im Verlauf des Beweisverfahrens sind der Vergessenheit anheim gegeben, während dem Endergebnis die hohen Weihen der Unfehlbarkeit verliehen werden." Ähnliche Vorwürfe erhebt Lakatos übrigens auch gegenüber dem "deduktivistischen" Stil der Naturwissenschaften.

Solche Kritiken an der Art des Vermittelns von Beweisen im Mathematikunterricht sind nicht auf den Mathematikunterricht beschränkt und fügen sich in eine Diskussion über "statisches" oder "dynamisches" Wissenschaftsverständnis ein. Das statische Wissenschaftsverständnis von einer Wissenschaft als Gefüge von wahren Theoremen über einen bestimmten Gegenstandsbereich scheint in der Wissenschaftstheorie überholt zu sein und weicht einem Wissenschaftsverständnis, in dem Wissenschaft nicht als ein fester Bestand erarbeiteter Erkenntnisse aufgefaßt wird, sondern als dynamischer Prozeß. In diesem Zusammenhang seien Arbeiten von K. Popper[17] und I. Lakatos[18] erwähnt.

Polya[19] hat diese beiden Aspekte - nun wieder auf den Mathematikunterricht bezogen - als "fertige Mathematik" und "Mathematik im Werden" bezeichnet. Er schreibt dazu: "In der Tat hat die Mathematik zwei Aspekte, sie ist die strenge Wissenschaft Euklids, aber sie ist auch etwas anderes. Nach Euklid dargestellt, erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft; aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle, induktive Wissenschaft. Beide Aspekte sind so alt wie die Mathematik selbst." Diesen beiden Gesichtspunkten der Mathematik schreibt er auch verschiedene Arten des Schließens zu. Die Schlußweise der fertigen Mathematik nennt er deduktives oder demonstratives Schließen, die Schlußweise der Mathematik im Werden plausibles oder induktives Schließen.

Auch H. Freudenthal setzt sich mit diesen beiden Aspekten auseinander[20] und hält der Maxime der Comeniusschen Didaktik[21] "Am besten lehrt man eine Tätigkeit, indem man sie vorführt" einen Satz mit Akzentverschiebung entgegen: "Am besten lernt man eine Tätigkeit, indem man sie ausführt."

Als Kontrast zur fertigen Mathematik schlägt Freudenthal die Mathematik in statu nascendi vor, wobei er fordert, daß es ein echtes Entstehen, kein stilisiertes sein solle. Die Schüler sollen die Mathematik von neuem erfinden, sozusagen "nacherfinden". Der Lernprozeß soll Perioden gerichteter Erfindung einschließen. Was zwar objektiv keine Erfindung ist, kann es sehr wohl aus der Perspektive des Lernenden sein. Ähnliche Positionen vertreten auch M. Wagenschein[22], A. Wittenberg[23] oder H. Winter[24].

Solche Argumente gelten natürlich auch für das Erlernen von Beweisfähigkeiten. Nun ist das Finden von Beweisen zwar eine anspruchsvolle Tätigkeit, die Kreativität und Ideenreichtum erfordert, für die es kaum Regeln gibt, zu denen jedoch Hilfen angeboten werden können. Die mit dem Finden von Beweisen verbundene geistige Tätigkeit ist eng mit Problemlösen und heuristischem Denken[25] verbunden, sodaß man sich gewisser heuristischer Strategien bedienen kann. Diese kann man, grob betrachtet, in zwei Gruppen teilen, in allgemeine heuristische Strategien, die in der Mathematik universell verwendbar sind, und in stoffspezifische Strategien, die an ein bestimmtes Stoffgebiet gebunden sind.

3.3. ALLGEMEINE HEURISTISCHE STRATEGIEN ZUM FINDEN VON BEWEISEN

Ein beachtenswerter Vorschlag für eine allgemeine Regel zum Problemlösen, der sich auch auf das Finden von Beweisen anwenden läßt, stammt von Polya[26]. Er empfiehlt eine Zerlegung des Problemlösens in vier Phasen:

- Verstehen der Aufgabe (Aufgabenanalyse)
- Ausdenken eines Planes
- Ausführen des Planes
- Rückschau.

Diese vier Phasen werden von ihm noch detailliert untergliedert beschrieben und können beinahe als

"Anleitung zum Problemlösen" verstanden werden. Bezieht sich ein Heurismus auf solche Problemlöseaufgaben, die die Erstellung eines Beweises zu einem gegebenen Satz zum Gegenstand haben, so spricht man von einem "Heurismus zum Beweisen". Heurismen zum Beweisen wurden auch von W. Walsch[27], K. Reichhold/W. Steinhöfl[28] und E.F. Danilowa[29] aufgestellt.

Von Polya wurden auch noch weitere allgemeine heuristische Strategien vorgeschlagen, die das Finden von Beweisen unterstützen können. Sie sollen anhand von Beispielen vorgestellt werden.

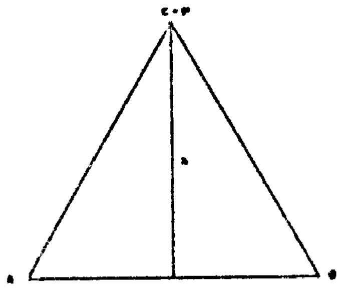
3.3.1. Spezialisieren

Die gezielte Untersuchung von Spezialfällen oder der Vergleich verschiedener Spezialfälle kann das Lösen von Problemen erleichtern und einen Hinweis für eine allgemeine Beweisstrategie liefern.

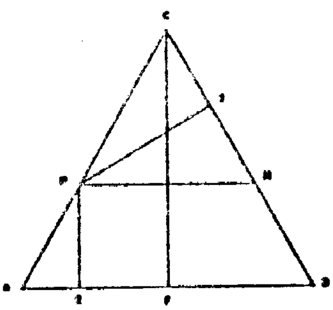
Beispiel[30]:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Man zeige, daß die Summe der Abstände von den Dreiecksseiten für beliebige Punkte im Inneren oder am Rand des Dreiecks immer gleich ist.

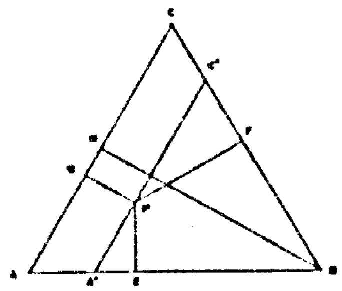
1. Spezialfall: P wird auf einem Eckpunkt des Dreiecks angenommen (etwa auf C). Dann ist die Summe der Abstände gleich der Höhe h. Damit wird die Vermutung gewonnen, daß die Summe stets gleich der Dreieckshöhe h ist.



2. Spezialfall: P liegt auf einer Seite des Dreiecks, etwa wie in der nächsten Abbildung. Zieht man in diesem Fall durch den Punkt P eine Parallele zur Seite AB, so erkennt man, daß die Summe der Längen der Strecken PE und PG gleich der Länge der Strecke CF und somit gleich der Höhe h ist.



Allgemeiner Fall: P liegt im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks. Zieht man durch P eine Parallele zur Seite AC, so kann dieser Fall auf den 2.Spezialfall zurückgeführt werden (P liegt auf der Seite A'C' des gleichseitigen Dreiecks A'BC'). Da also $\overline{PE}+\overline{PF}$ gleich der Höhe des Dreiecks A'BC' ist, ist $\overline{PE}+\overline{PG}$ gleich der Höhe des Dreiecks ABC



Der 1.Spezialfall stellt einen **extremen Spezialfall** dar, der 2.Spezialfall einen **führenden Spezialfall** (er führt unmittelbar auf die allgemeine Lösung). Eine starke Aussagekraft können auch **repräsentative** Spezialfälle haben. Auf diese werde ich unter dem Kapitel "Beispielgebundenes Beweisen" noch ausführlicher eingehen.

Auch der entgegengesetzte Vorgang zum Spezialisieren, das **Generalisieren** kann dazu beitragen, Problemlöseprozesse zu erleichtern, indem das Problem überschaubarer wird. In den Stufen des Erlernens von Beweisfähigkeiten kommt dieser Fall jedoch wegen der meist noch fehlenden Abstraktionsfähigkeiten sehr selten vor.

3.3.2. Analogisieren

Die Orientierung an einem bereits gelösten analogen Problem kann das Lösen eines Problems erleichtern. Soll man etwa bei den Differentiationsregeln für reelle Funktionen die Quotientenregel beweisen, so kann es nützlich sein, sich am Beweis der Produktregel zu orientieren. Entscheidende Schritte beim Beweis der Produktregel sind:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \qquad (*)$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)$$

Da aufgrund entsprechender Voraussetzungen

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

sowie $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
ergibt sich nach den Limitenregeln

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Für den Beweis der Quotientenregel kann nun eine analoge Umformung wie bei der Produktregel (*) den Beweis ermöglichen:

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0)\right)$$

Da wieder aufgrund entsprechender Voraussetzung

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

sowie $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$
ergibt sich nach den Limitenregeln

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Analogien können allerdings auch zu Irrtümern führen. So könnte man etwa in Analogie zur Summenregel $(f + g)' = f' + g'$ vermuten, daß $(f\cdot g)' = f'g'$.

3.3.3. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

Der soeben vorgestellte Beweis für die Produktregel wird üblicherweise von links nach rechts gelesen. Wird der Beweis auch in dieser Reihenfolge durchgeführt, so spricht man von einem Vorwärtsarbeiten. Eine wichtige Umformung ist dabei die Subtraktion und anschließende Addition des Ausdruckes $f(x_0)g(x)$, eine Vorgangsweise, auf die ein ungeübter Problemlöser kaum selbständig stößt. Beim Rückwärtsarbeiten wird diese Umformung doch in einem wesentlich größeren Maße nahegelegt.

Geht man nämlich von der zu beweisen Aussage aus:

$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
und berücksichtigt die Voraussetzungen

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

sowie $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

so ergibt sich, daß $\left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \cdot g(x_0)$

Grenzwert von $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0)$

oder von $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x)$

sein kann und außerdem $f(x_0)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$

Grenzwert von $f(x_0)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

oder von $f(x)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ sein kann.

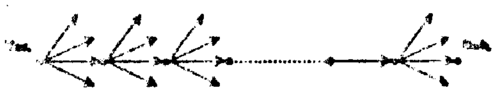
Vergleicht man nun die Ausgangssituation $\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$ mit den "Rückwärtsschlüssen" aus der zu beweisenden Aussage, so erkennt man, daß die beiden Ausdrücke

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x)$ und $f(x_0)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ zu wählen sind, woraus dann unmittelbar die notwendige Umformung ersichtlich ist.

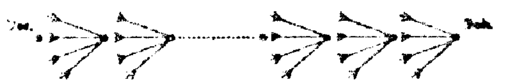
Häufig wird auch ein gemischtes Vorwärts- Rückwärtsarbeiten erfolgreich verwendet. Man beginnt mit den Voraussetzungen und folgert in Richtung der zu beweisenden Behauptung, bis man keine weiterführende Folgerung mehr erkennt. Man beginnt dann mit der zu beweisenden Behauptung und überlegt, aus welchen Aussagen man die Behauptung folgern könnte. Auf diese Weise hofft man, die Lücke schließen zu können.

Die folgenden Graphiken sollen die Möglichkeiten beim Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten darstellen:

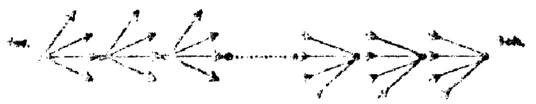
Vorwärtsarbeiten $\Rightarrow$



Rückwärtsarbeiten $\Leftarrow$



Vorwärts- Rückwärtsarbeiten $\Rightarrow$ $\Leftarrow$



1.4. BEWEISEN MIT VORGEGEBENER ARGUMENTATIONSBASIS

Eine wichtige Voraussetzung für Einsichten in Beweisvorgänge im Mathematikunterricht ist das Anknüpfen an die Argumentationsvoraussetzungen der Schüler. Will man eine Aussage A durch Schließen begründen, ist es im allgemeinen notwendig, daß Aussagen B, C, ... vorliegen, die als richtig angesehen werden und aus denen auf die Richtigkeit von A geschlossen werden kann. Eine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden, soll zusammen mit den Schlußweisen, die als zulässig anerkannt werden, als **Argumentationsbasis** bezeichnet werden. Eine Begründung aufgrund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als ein Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis bezeichnet werden.[31]
In vielen Unterrichtssituationen ist bei Argumentationsaufgaben die Argumentationsbasis nicht explizit, nur unbewußt, unvollständig oder unpräzise vorgegeben. Solche Fälle treten vor allem bei Beweisen auf dem Niveau einer lokal geordneten Theorie auf. Soll jedoch ein Beweis bei der Vermittlung als solcher anerkannt werden, so müssen alle an der Kommunikation beteiligten Personen annähernd gleiche Argumentationsbasis verwenden. Dies trifft in der Schulsituation bei Lehrern und Schülern im allgemeinen nicht zu. Folgerungen dieses Umstandes sind häufig, daß Argumentationen nicht verstanden werden, andererseits aber auch, daß Beweislücken nicht erkannt werden ("Muß das noch bewiesen werden? Das ist doch klar!"). Als Voraussetzung zum besseren Vermitteln von Beweisen kann daher bei Lehrern und Schülern das Streben nach einer gemeinsamen Argumentationsbasis angesehen werden. Dabei sollten vor allem die Lehrer versuchen, die von den Schülern verwendeten Argumentationsbasen immer besser zu erkennen, um ihre eigenen besser verständlich machen zu können.

Im folgenden Beispiel soll gezeigt werden, wie verschiedenartig Argumentationsbasen für dieselbe Aufgabenstellung sein können:

Begründe: $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 3$

Begründungsmöglichkeiten mit unterschiedlichen Argumentationsbasen:

(1) Wenn $x \to 4$, dann $\frac{x}{2} \to 2$ und $\frac{x}{2}+1 \to 3$

$x \to 4$ soll hier bedeuten: x nähert sich unbegrenzt der Zahl 4.
Die Argumentationsbasis bildet hier ein intuitiver, nicht präzisierter Begriff des "unbegrenzten Näherns".

(2) Durch Zurückführen auf die Sätze:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

$$\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

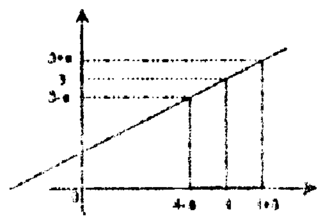
$$\lim_{x\to a}(f(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) + c,$$

die dann auch die Argumentationsbasis bilden.

(3) Begründung anhand der untenstehenden Zeichnung:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodaß gilt:
$|x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

Die Argumentationsbasis bildet eine entsprechende Grenzwertdefinition und die der Anschauung entnommene Annahme, daß es zu jedem beliebigen ε ein entsprechendes δ gibt, das die obige Bedingung erfüllt.



(4) $|f(x)-3| = \left|\frac{x}{2}+1-3\right| = \left|\frac{x}{2}-2\right| = \frac{1}{2}|x-4| < \frac{1}{2}\delta$

Falls also $\delta \leq 2\varepsilon$ gewählt wird, ist die Bedingung in (3) erfüllt.
Die Argumentationsbasis enthält neben der Grenzwertdefinition auch noch Rechengesetze.

(5) f ist eine lineare Funktion. Lineare Funktionen sind in $\mathfrak{R}$ stetig. Es gilt also: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ und daher

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 3$$

Jede der fünf angegebenen Begründungen entspricht der Aufgabenstellung. In Unterrichtssituationen kommt es nun häufig vor, daß eine Begründung in einer bestimmten Form erfolgen soll. In diesem Fall soll den Schülern die Argumentationsbasis vorgegeben werden, etwa durch eine Formulierung wie "Begründe unter Verwendung von Sätzen über Grenzwerte" oder "Begründe durch Veranschaulichung der Grenzwertdefinition". Eine derartige Angabe der Argumentationsbasis kann entfallen, wenn den Schülern die Argumentationsbasis aufgrund der unmittelbar vorangegangenen Unterrichtssituation klar ist.

3.5. Beispielgebundenes Beweisen

3.5.1. Zum Begriff "Beispielgebundenes Beweisen"

Auf Seite 8 wurde ein Zusammenhang zwischen dem ggT und dem kgV zweier natürlicher Zahlen auf einem konkreten Niveau einer lokal geordneten Theorie bewiesen. Über den mathematischen und didaktischen Wert diese Art des Beweisens, die man als "Beispielgebundenes Beweisen" bezeichnen kann, hat in den letzten Jahren eine intensive didaktische Diskussion eingesetzt. Beiträge zu diesem Problemkreis findet man in der Literatur - zum Teil auch in einem etwas variierten Verständnis - auch unter den Begriffen "präformales Beweisen"[32], "prämathematisches Beweisen"[33], "konkretes Beweisen"[34], "paradigmatisches Beweisen"[35] oder "Beweisen anhand repräsentativer Spezialfälle"[36].

Beispielgebundenes Beweisen gründet in konkreten Handlungen (Operationen im Sinne von J. Piaget[37]), die korrekten, verallgemeinerbaren mathematischen Argumenten entsprechen, die i.a. in ihrer psychologisch natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen (also nicht von hinten aufgezäumt sind, wie es bei vielen formalen Beweisen geschieht). Die Argumente selbst sollen verallgemeinerbar sein. Außerdem soll das gewählte Beispiel eine allgemeine Begründungsstrategie vermitteln.

Beispielgebundene Beweise sind Beweise, aber in besonderer Art dargestellt und sind nicht zu verwechseln mit:

- unzulänglichen Begründungen, "nur für Kinder";
- nur experimentellen Verifikationen;
- nur "anschaulichen" Begründungen;
- unvollständiger Induktion nach Verifikation einiger Sonderfälle.

Das Erkennen dieser Unterschiede, vor allem das Abgrenzen von der "Unvollständigen Induktion", scheint mir eine ganz wesentliche Voraussetzung für einen erfolgreichen Einsatz dieser Beweisart im schulischen Lernprozeß zu sein. Diese Abgrenzung scheint mir allerdings durch den Umstand erschwert, daß nicht wenige Gymnasialabsolventen tiefgreifende Probleme bei der Abgrenzung einer "Unvollständigen Induktion" oder einer partiellen experimentellen Verifikation von einem Beweis haben. Ja sogar bei praktizierenden Mathematiklehrern wurden solche Defizite bei grundlegenden Einsichten in Denkweisen der Mathematik beobachtet. Die Existenz solcher Schwierigkeiten wird auch durch eigene Beobachtungen an Lehramtskandidaten für das Mathematiklehramt an Hauptschulen, aber auch an Mathematiklehrern mit schon größerer Unterrichtserfahrung, bestätigt. Auch KIRSCH A.[38] weist anhand eines Vergleiches zweier "Beweise" (eines Unmöglichkeitsbeweises sowie eines Beweises eines Sonderfalles des Pythagoräischen Lehrsatzes) auf diese Probleme hin. Ich möchte daher auf diese für Lernprozesse besonders geeignete Variante des Beweisens etwas näher eingehen.

3.5.2. Beispiele zur Teilbarkeitsrelation in N

3.5.2.1. Das Transitivgesetz

Beispielgebundenes Beweisen auf den folgenden Repräsentationsebenen:

a) Ikonische Repräsentationsebene
b Symbolische Repräsentationsebene
c) Beweis mit Variablennutzung

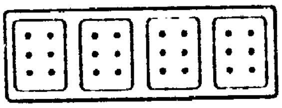
Es soll anhand des Beispiels: $3 \mid 6$ und $6 \mid 18 \Rightarrow 3 \mid 18$ die Gültigkeit des Transitivgesetzes für alle natürlichen Zahlen erkannt werden.

Dabei ist - wie bei vielen anderen beispielgebundenen Beweisen - auf eine saubere Vorgangsweise zu achten, um Verwechslungen zu vermeiden, auf die bereits früher hingewiesen wurde. Keinesfalls darf der Eindruck entstehen, daß die Gültigkeit eines Gesetzes aus der Gültigkeit eines konkreten Beispiels gefolgert werden darf. Dieser Eindruck kann sogar noch verstärkt werden, wenn man noch einige weitere Beispiele anschließt, etwa: "Begründe mit vier selbstgewählten Beispielen die Gültigkeit des Transitivgesetzes für natürliche Zahlen!"

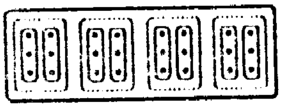
3.5.2.1.1. Beispielgebundener Beweis auf der ikonischen Repräsentationsebene

Die Relation $3 \mid 6$ wird bildhaft dargestellt durch sechs Objekte (Punkte, Kugeln), die sich in zwei Gruppen zu je drei Objekten unterteilen lassen, wobei kein Objekt "übrigbleibt".

Analog wird die Eigenschaft $8 \mid 24$ bildhaft durch 24 Objekte dargestellt, die sich restlos in Teilmengen zu je 8 Objekten unterteilen lassen.



Aus der folgenden bildhaften Darstellung kann man nun erkennen, daß damit 3 ein Teiler von 24 sein muß.



3.5.2.1.2. Beispielgebundener Beweis auf der symbolischen Repräsentationsebene

Ein beispielgebundener Beweis auf der symbolischen Repräsentationsebene soll am gleichen Beispiel demonstriert werden: $3 \mid 6$ und $6 \mid 18 \Rightarrow 3 \mid 18$

$3 \mid 6$ heißt, daß es eine natürliche Zahl n gibt, sodaß $6 = 3 \cdot n$.
In unserem Fall ist $n=2$, sodaß also $6 = 3 \cdot 2$.

$6 \mid 24$ heißt, daß es eine natürliche Zahl n gibt, sodaß $24 = 6 \cdot n$.
In diesem Fall ist nun $n=4$, sodaß also $24 = 6 \cdot 4$.

Aus $24 = 6 \cdot 4$
folgt nun $24 = (3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4)$
daher gilt: $3 \mid 24$.

Dieser beispielgebundene Beweis entspricht in der Abfolge der Argumentationsschritte genau dem oben vorgestellten beispielgebundenen Beweis auf der ikonischen Repräsentationsebene. Einzig die Darstellungsform hat sich geändert.

3.5.2.1.3. Beweis mit Variablennutzung

Seien a, b und c natürliche Zahlen:
Beh.: $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

Beweis:
$a \mid b$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl r gibt mit $b = a \cdot r$.

$b \mid c$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl s gibt mit $c = b \cdot s$.

Aus $c = b \cdot s$
folgt nun $c = (a \cdot r) \cdot s = a \cdot (r \cdot s)$
daher gilt: $a \mid c$.

3.5.2.1.4. Bemerkungen zu diesen Beispielen

Der Beweis mit Variablennutzung entspricht wiederum in der Beweisstruktur genau der Beweisführung auf der symbolischen Repräsentationsebene. Man könnte die drei Beweise im Sinne STEINS[39] im Explizitheitsgrad auf der Ebene einer lokal geordneten Theorie und im Abstraktionsgrad in der oben angeführten Reihenfolge vom konkreten zum abstrakten Niveau hin zunehmend ansiedeln.
Die logischen Schlußweisen sind in allen drei Beweisen gleich. Bei genauerem Betrachten ergeben sich jedoch Unterschiede in der Formulierung des Satzes:

a) $3 \mid 6$ und $6 \mid 18 \Rightarrow 3 \mid 18$
Die Sprech- (und Denk)weise könnte hier lauten: "3 ist Teiler von 6 und 6 ist Teiler von 18, daher ist 3 ein Teiler von 18."

b) $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$
In der allgemeinen Formulierung ist jedoch die obige Sprechweise nicht mehr sinnvoll. Die Diskrepanz zeigt sich stärker, wenn man den Satz etwas präziser formuliert:
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.
Durch die Verwendung des Allquantors wird die Formulierung des Satzes und damit auch seine logische Struktur für Schüler i.a. schwieriger, müssen sie doch die "Wenn ... dann" - Beziehung erst erkennen und verstehen: "Wenn a ein Teiler von b und b ein Teiler von c ist, dann ist a ein Teiler von c."

3.5.2.2. Die Summenregel

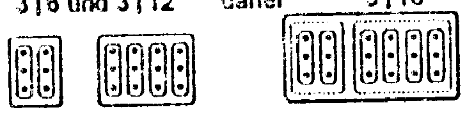
Nach den eindrucksvollen Beweisen der Transitivität der Teilbarkeitsrelation in N sollen nun weitere Beispiele für beispielgebundenes Beweisen behandelt werden.

So läßt sich auch die Summenregel:
$\forall a, b, c \in N$: $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$
auf den drei vorhin besprochenen Repräsentationsebenen begründen.

3.5.2.2.1. Beispielgebundener Beweis auf der ikonischen Repräsentationsebene

Demonstration anhand des Beispiels
$3 \mid 6$ und $3 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 18$:

$3 \mid 6$ und $3 \mid 12$ daher $3 \mid 18$



Die Visualisierung der Beweisstruktur ist hier so eindrucksvoll, daß sich der Satz "Ich sehe es!" unmittelbar aufdrängt.

3.5.2.2.2. Beispielgebundener Beweis auf der symbolischen Repräsentationsebene

Ein beispielgebundener Beweis auf der symbolischen Repräsentationsebene soll wieder am gleichen Beispiel gezeigt werden: $3 \mid 6$ und $3 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 18$

$3 \mid 6$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl n gibt, sodaß $6 = 3 \cdot n$.
In unserem Fall ist $n=2$, sodaß also $6 = 3 \cdot 2$.

$3 \mid 12$ heißt, daß es eine natürliche Zahl n gibt, sodaß $12 = 3 \cdot n$.
In diesem Fall ist nun $n=4$, sodaß also $12 = 3 \cdot 4$.

Aus $18 = 6 + 12$
folgt nun $18 = (3 \cdot 2) + (3 \cdot 4) = 3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 6$

daher gilt: $3 \mid 18$.

Dieser beispielgebundene Beweis entspricht in der Abfolge der Argumentationsschritte wiederum genau dem oben vorgestellten beispielgebundenen Beweis auf der ikonischen Repräsentationsebene.

3.5.2.2.3. Beweis mit Variablennutzung

Seien a, b und c natürliche Zahlen:
Beh.: $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$.

Beweis:

$a \mid b$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl r gibt mit $b = a \cdot r$.

$a \mid c$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl s gibt mit $c = a \cdot s$.

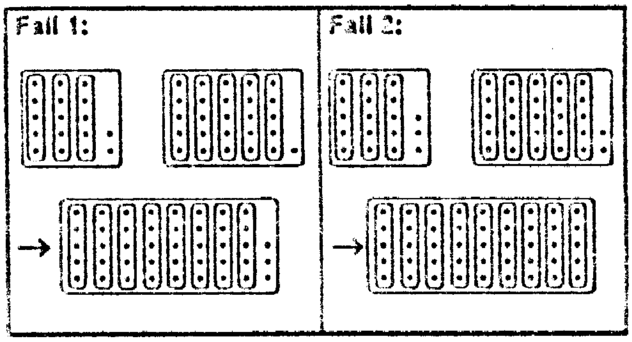
Aus $b + c = a \cdot r + a \cdot s$
folgt nun $b + c = a \cdot (r + s)$
daher gilt: $a \mid (b+c)$.

3.5.2.2.4. Bemerkungen zur Summenregel

Analog zur Summenregel läßt sich auch die Differenzregel auf allen drei Repräsentationsniveaus zeigen:
$\forall a, b, c \in N$ mit $b \geq c$: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b-c)$

Nebenbei sei bemerkt, daß sich auf dem ikonischen Repräsentationsniveau u. U. Vermutungen leichter aufstellen lassen als auf einem abstrakteren Niveau. Dies sei an einem Beispiel gezeigt:

Seien $a,b,c \in N$ mit $\neg(a \mid b) \wedge \neg(a \mid c)$.
Ist die Summe (b+c) durch a teilbar?
Die folgenden ikonischen Darstellungen beschreiben zwei Fälle, die eine Antwort auf die Frage ermöglichen:



Anhand der ikonischen Darstellung kann auch im allgemeinen wesentlich leichter eine Antwort darauf gegeben werden, unter welchen Voraussetzungen die Summe (b+c) durch a teilbar ist, als wenn diese Eigenschaften durch (im wesentlichen ungesteuertes) Probieren mit Zahlen untersucht wird.

Analog läßt sich auch die Behauptung untersuchen:
$\forall a,b,c \in N$: $a \mid b \wedge \neg(a \mid c) \Rightarrow \neg(a \mid (b+c))$.

3.5.2.3. Eine Produktregel

Setzt man in die allgemeine Produktregel
$\forall a,b,c,d \in N$: $a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d$
für c den Wert 1 ein, so erhält man einen Spezialfall der allgemeineren Produktregel:
$\forall a,b,n \in N$: $a \mid b \Rightarrow a \mid n \cdot b$
Dieser Sonderfall ist für viele Teilbarkeitsbetrachtungen von großer Bedeutung und läßt sich auf den oben vorgestellten drei Repräsentationsniveaus besonders einsichtig begründen. Dies soll am Beispiel $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 4 \cdot 6$ gezeigt werden.

3.5.2.3.1. Beispielgebundener Beweis auf der ikonischen Repräsentationsebene

$3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 4 \cdot 6$

3.5.2.3.2. Beispielgebundener Beweis auf der symbolischen Repräsentationsebene

Es ist zu zeigen: $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 4 \cdot 6$

Begründung:

$3 \mid 6$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl n gibt mit $6 = 3 \cdot n$. In unserem Fall ist $n=2$.

Da nun $4 \cdot 6 = 4 \cdot (3 \cdot 2) = (4 \cdot 3) \cdot 2 = (3 \cdot 4) \cdot 2 = 3 \cdot (4 \cdot 2)$
folgt, daß $3 \mid 4 \cdot 6$

3.5.2.3.3. Beweis mit Variablennutzung

Seien $a,b,n \in N$:
Beh.: $a \mid b \Rightarrow a \mid n \cdot b$
Beweis:
$a \mid b$ bedeutet, daß es eine natürliche Zahl r gibt mit $b = a \cdot r$.
Nun gilt:
$n \cdot b = n \cdot (a \cdot r) = (n \cdot a) \cdot r = (a \cdot n) \cdot r = a \cdot (n \cdot r) \Rightarrow a \mid n \cdot b$

3.5.2.3.4. Bemerkungen zu dieser Produktregel:

Von der oben vorgestellten Begründung auf der symbolischen Repräsentationsebene wäre auch noch eine Variante denkbar, indem man die Produktregel auf die vorher bewiesene Summenregel zurückführt:
$3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid (6+6+6+6) \Rightarrow 3 \mid 4 \cdot 6$
Dadurch kann eine sehr erwünschte Verzahnung zwischen diesen beiden Regeln erreicht werden. Außerdem wird hier ein zentraler Beweisgedanke der Mathematik ersichtlich, der typisch für viele Vorgänge in der Mathematik ist, nämlich das Rückführen einer höheren Rechenart auf eine einfachere. Diese Rückführung ist aber auch aus lernpsychologischer Sicht sehr empfehlenswert, da sie nach AUSUBEL/NOVAK/ HANESIAN[40] als "Organisationshilfe" verstanden werden kann, um die proaktive Förderung des Lernens zu erhöhen. AUSUBEL/NOVAK/ HANESIAN begründen solche Organisationshilfen mit folgenden Punkten:

1. Ist es wichtig, relevante und auch etablierte Ideen bereits in der kognitiven Struktur zur Verfügung zu haben, um logisch sinnvolle neue Ideen potentiell sinnvoll zu machen und ihnen eine stabile Verankerung zu geben,
2. gibt es entsprechende Vorteile, allgemeine und umfassendere Ideen einer Disziplin als verankernde oder subsumierende Idee zu benutzen (wegen der Eignung und Spezialisierung ihrer Relevanz, ihrer größeren inhärenten Stabilität, ihres größeren Erklärungsvermögens und ihrer integrativen Kapazität),
3. versuchen Organisationshilfen selbst, den bereits in der kognitiven Struktur vorhandenen Inhalt zu identifizieren und zeigen darüberhinaus die Relevanz dieses Inhalts und ihre eigene Relevanz für den neuen Lernstoff an.

3.5.2.4. Eine Quersummenregel

Manche Regeln für die schnelle Überprüfung der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl a durch eine andere natürliche Zahl b hatten früher eine gewisse Bedeutung. Man denke etwa an Quersummenregel für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 9 und deren Einsatz zu Kontrolle von Rechenergebnissen (Neunerprobe). Solche *Prüfverfahren* haben heute in der "Alltagsmathematik" durch den Einsatz elektronischer Rechengeräte zwar an Bedeutung verloren, werden aber weiterhin auch in der Computertechnologie - etwa zur Überprüfung von Codes - verwendet.

Für die Schule bietet sich die Behandlung der Quersummenregel vor allem wegen ihrer didaktisch außerordentlich wertvollen Möglichkeiten der Beweisführung an.

3.5.2.4.1. Beweis der Quersummenregel (Teilbarkeit durch 9) auf der symbolischen *Repräsentationsebene.*

Beispielgebundener Beweis anhand der Zahl 56234:

$$
\begin{aligned}
&56284 = \\
&= 5 \cdot 10000 + 6 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 \\
&= 5 \cdot (9999+1) + 6 \cdot (999+1) + 2 \cdot (99+1) + 8 \cdot (9+1) + 4 \\
&= (5 \cdot 9999 + 6 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 8 \cdot 9) + (5+6+2+8+4) \\
&= 9 \cdot (5 \cdot 1111 + 6 \cdot 111 + 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1) + \\
&+ \boxed{(5+6+2+8+4)}
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck in eckiger Klammer ist durch 9 teilbar. Die Zahl (in unserem Fall 56284) ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn der eingerahmte Ausdruck durch 9 teilbar ist. Der eingerahmte Ausdruck ist jedoch genau die Quersumme der Zahl 56284.
Aus der Beweisführung erkennt man, daß diese Eigenschaft auch erhalten bleibt, wenn man die Zahl 56284 durch eine andere ersetzt, wodurch die Variablennutzung schon nahegelegt wird.

3.5.2.4.2. Beweis mit Variablennutzung

a) Beweis für fünfstellige natürliche Zahlen:

$$
\begin{aligned}
&abcde = \\
&= a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e \\
&= a \cdot (9999+1) + b \cdot (999+1) + c \cdot (99+1) + d \cdot (9+1) + e \\
&= (a \cdot 9999 + b \cdot 999 + c \cdot 99 + d \cdot 9) + (a+b+c+d+e) \\
&= 9 \cdot (a \cdot 1111 + b \cdot 111 + c \cdot 11 + d \cdot 1) + \\
&+ \boxed{(a+b+c+d+e)}
\end{aligned}
$$

Die weitere Argumentation entspricht genau jener auf der symbolischen Repräsentationsebene.

b) Beweis für eine beliebige natürliche Zahl n:

$$n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left[\left(10^i - 1\right) + 1\right] = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left[\left(10^i - 1\right)\right] + \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Nun gilt: $9 \mid (10^i - 1) \quad \forall i \in N$ (einschließlich $i=0$) und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left[\left(10^i - 1\right)\right] = 9 \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\left(10^i - 1\right)}{9}$$

Es ist somit $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left[\left(10^i - 1\right)\right]$ durch 9 teilbar und es

hängt genau vom Ausdruck $\sum_{i=0}^{n} a_i$ (das ist aber genau die Quersumme von n) ab, ob n durch 9 teilbar ist oder nicht.

3.6. Zur Verwendung von Bildern in Beweisen

In vielen im vorhergehenden Kapitel vorgestellten beispielgebundenen Beweisen wurden Bilder (Darstellungen auf der ikonischen Repräsentationsebene) verwendet, die sich stark auf die Anschauung stützen. Ist der didaktische Wert des Einsatzes von Bildern im Unterricht für den Lernprozeß derzeit weitgehend unbestritten, so gibt es für den Einsatz im Mathematikunterricht und speziell für die Vermittlung von Beweisen doch einige Bedenken:

1. Visuelle Prozesse im Unterricht erfordern i.a. einen erheblich größeren organisatorischen und zeitlichen Aufwand.

2. a) Bilder können trügerisch sein und zu falschen Vermutungen verleiten.
   b) Ein einzelnes Bild oder eine Sequenz von Bildern kann nicht einen allgemein gültigen Satz beweisen.

Den Einwänden im Punkt 1 kann man durch den Einsatz entsprechender Medien (wie etwa Videofilmen, Computergraphiken und ähnlichen) begegnen. Mit diesen Medien dürften die Schulen in nächster Zeit umfassend ausgestattet sein.

Die Bedenken im Punkt 2 sind eher grundsätzlicher Natur und sollen im folgenden erörtert werden.

"Auf Anschauung kann man ja nur Induktionen (und zwar unvollständige) gründen. Strikte Beweise gibt es nur im Formalismus der mathematischen Fachsprache. Diese sind anschauungsfrei zu führen, d.h. das zu beweisende Theorem ist rein logisch aus explizit formulierten Axiomen herzuleiten und es darf als Beweisgrund nicht auf Figuren verwiesen werden."[41]. Dieses Verhältnis von Anschauung und Mathematik ist allerdings nicht immer so gesehen worden. Nach VOLKERT[42] kamen der Anschauung im Rahmen der Mathematik im historischen Rückblick drei Funktionen zu:

1. die erkenntnisbegründende *Funktion*: eine Behauptung wird durch Appell an die Anschauung bewiesen (etwa der Nullstellensatz aus der reellen Analysis).

2. die erkenntnisbegrenzende Funktion: nur dasjenige darf in die Mathematik aufgenommen werden, das ein anschaulich sicheres Fundament aufzuweisen hat.

3. die erkenntnisleitende Funktion: Anschauung legt Vermutungen nahe, die man anschließend formal zu verifizieren hat.

Vor allem die ersten zwei Punkte wurden im letzten Jahrhundert stark erschüttert - man denke nur an die "pathologischen" Funktionen und Monster im Zusammenhang mit der Stetigkeit und Differenzierbarkeit reeller Funktionen oder an Fragen der Existenz eines Flächeninhalts.

Allerdings kann man dem Argument "Die Anschauung ist trügerisch, sie hat zu falschen Vermutungen Anlaß gegeben" entgegenhalten, daß auch die Logik Fehler kennt. So wie es einen "Fehlschluß" im Gegensatz zum logischen Schluß gibt, muß man dann eben auch zwischen "Fehlanschauung" und richtiger Anschauung unterscheiden. Überdies kann man versuchen, die Anschauung so zu schulen, daß sie mit solchen pathologischen Funktionen und Monstern umzugehen lernt ("fortschreitende Anschauung"). Diesen Punkt dürfte auch Benoit Mandelbrot 1982 mit dem folgenden Zitat angesprochen haben:

> "Aber das Wesentliche liegt woanders. Man versichert uns, daß die Peanokurve nur durch logische Analyse begreifbar sei und daß Anschauung und Auge uns getäuscht hätten. Tatsächlich würden die Vertreter dieser einhelligen Reaktionen besser daran tun, ihre Anschauung und ihre Augen zu üben."

Das Argument "Anschauung ist singulär und kann deshalb keine allgemeinen Sätze begründen" verkennt den Charakter der Zeichenanschauung. Zeichen werden immer exemplarisch genommen. Sie stehen nicht für sich selbst, sondern für eine ganze Klasse von Gegenständen.

Die Argumente für und gegen die Anschauung gelten natürlich speziell auch für Bilder in der Mathematik. Für den Einsatz von Bildern im Mathematikunterricht, speziell im Bereich des Beweisens, erscheint daher wesentlich, daß man Bilder "richtig sehen" lernt, d.h. das Betrachten von Bildern darf sich nicht auf ein Feststellen vorhandener äußerer Merkmale reduzieren. Dadurch würde Anschauung auf eine bloße Merkmalwahrnehmung eingeschränkt werden[43].

Es sollen vielmehr durch Vergleich und Analyse von Bedingungen Beziehungen zwischen ikonischen Darstellungen festgestellt werden. Auf diese Weise wird Anschauung zu einer Zeichenhandlung mit Schemaaspekt[44]. Bilder werden zu Handlungsprotokollen. Durch diese Einbeziehung des Handlungs- und

Schemaaspektes geht die Anschauung über die Wahrnehmung hinaus und verliert ihren singulären Charakter. Das Bild und damit die Handlung müssen allerdings so beschaffen sein, daß dieselbe Beobachtung unabhängig von gewissen Größen in der Figur festgestellt werden kann. Die Allgemeingültigkeit ergibt sich dann aus der Durchführbarkeit der Handlung und nicht aus der Möglichkeit der visuellen Darstellung. Nur jene Anschauung, die als Zeichenhandlung mit Schemaaspekt interpretiert wird, verhindert Trugschlüsse bzw. ermöglicht irrtumsfreies Sehen. Als didaktische Konsequenz für den Mathematikunterricht ergibt sich daher, Kinder anzuleiten, daß sie Bilder in diesem Sinne anschauen und nicht nur wahrnehmen.

Als weitere Konsequenz, vor allem für Mathematik-Didaktiker, ergibt sich die Notwendigkeit, einfache Darstellungen wie etwa die Bilder im vorhergehenden Kapitel zu entwickeln, aber auch, solche Darstellungen als Argumentationen bzw. als Lösungen anzuerkennen.

---

1 STEIN, M. (1986): Beweisen. Texte zur mathematisch - naturwissenschaftlich - technischen Forschung und Lehre. Band 19. Franzbecker, Bad Salzdethfurt.

2 LANDAU E., Grundlagen der Analysis, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt. Akademiesche Verlagsgesellschaft Frankfurt/Main 1970.

3 STREHL R., Zahlbereiche, Herder Verlag Freiburg/Breisgau 1972.

4 SZASZ G./GEHER L./KOVACS Ph.D.: Contests in higher mathematics, Hungary 1949-1961. Akademiai Kiado, Budapest 1968.

5 ENGEL A.: Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. Ernst Klett Verlag. Stuttgart 1965.

6 HORNFECK, B.: Algebra, Berlin 1976

7 Ein Integritätsbereich E heißt Euklidischer Ring, wenn es eine Abbildung w: E\{0} → N, die sogenannte Wertfunktion, mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt $w(ab) \geq w(a)$

2. (Divisionsalgorithmus) Zu je zwei Elementen $a,b \in E$ ($a \neq 0$) gibt es Elemente $q,r \in E$ derart, daß $b=qa+r$, wobei entweder $r=0$ oder $w(r)<w(a)$.

(vgl. Van der Waerden, B.L.: Algebra I, Springer, Berlin 1971.)

8 KIRSCH A.: Mathematik wirklich verstehen. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln 1987.

9 Auf Beweise dieser Art werde ich im Kapitel "Beispielgebundenes Beweisen" noch genauer eingehen.

10 ggT ... größter gemeinsamer Teiler

11 kgV ... kleinstes gemeinsames Vielfaches

12 SCHUPP H..: Untersuchungen und Überlegungen zum Stand des Beweisvermögens der Studienanfänger. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Schroedel 1974.

13 LEPPIG M.: Anmerkungen zu Beweisfähigkeiten bei Abiturienten und Studienbewerbern. In: DÖRFLER/FISCHER (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Teubner 1979.

Leppig hat an etwa 800 Studenten des mathematischen Vorsemesters überprüft, inwieweit sie an der Schule übliche Beweisverfahren beherrschen. Dabei zeigte sich, daß nur 25% der Probanden überhaupt irgendeinen ihnen bekannten Satz darstellen und in angemessener Weise beweisen konnten. Weitere Aufgaben bezogen sich auf Beschreibung der Beweisverfahren: indirekter Beweis, vollständige Induktion und deren jeweilige Anwendung an je einem frei zu wählenden Beispiel. 75% der StudentInnen konnten diese Aufgabe für vollständige Induktion bzw. 85% für indirekten Beweis nicht lösen.

14 FISCHER, R./MALLE, G.: Mensch und Mathematik. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich 1985.

15 TIETZE U.P./KLIKA M./WOLPERS H.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Vieweg Verlag Braunschweig 1982.

16 LAKATOS I.: Beweise und Widerlegungen, Vieweg Verlag, Braunschweig 1979.

17 POPPER K.: Logik der Forschung. Springer Verlag, Wien 1971.

18 LAKATOS I./MUSGRAVE A. (Hrsg.): Kritik und Erkenntnisfortschritt. Vieweg Verlag, Braunschweig 1974.

19 POLYA G.: Schule des Denkens. Bern 1967

20 FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett Verlag, Stuttgart 1977.

21 Comenius J.A., 1592 - 1670, tschechischer Theologe und Pädagoge,

22 WAGENSCHEIN M.: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Bd. 1 und 2. Klett, Stuttgart 1970.

23 WITTENBERG, A.: Vom Denken in Begriffen. Birkhäuser, Basel 1968.

24 WINTER, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1975, Heft 3.

25 Unter Heuristik versteht man die Lehre vom plau-

siblen Schließen und ihres Einsatzes zum Lösen von Problemen (oder in einem etwas umfassenderen Verständnis die Lehre von den Wegen zur Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnisse).

26 POLYA, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Birkhäuser, Bern 1967.

27 WALSCH, W.: Zum Beweisen im Mathematikunterricht, Berlin 1972.

28 REICHHOLD K./STEINHÖFL, W.: Zur Verwendung von Handlungsanweisungen beim Beweisen mathematischer Sätze im Unterricht. In: Mathematik in der Schule, 1973.

29 DANILOWA, E.F.: Wege zur Lösung geometrischer Aufgaben. Berlin 1964.

30 Aus: TIETZE U.P./KLIKA M./WOLPERS H.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Vieweg Verlag Braunschweig 1982.

31 BÜRGER H.: Beweisen im Mathematikunterricht - Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: DÖRFLER W., FISCHER R.: Beweisen im Mathematikunterricht, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1979.

32 HERING H., Begriffsentwicklung und präformales Beweisen bei infinitesimalen Prozessen. In: JMD 10, 1989.

33 KIRSCH A., Beispiele für "prämathematische" Beweise. In: Dörfler, W./Fischer R. (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Wien 1979.

SEMADENI Z., The concept of premathematics as a theoretical background for primary mathematics teaching. Polish Academy of Sciences, o.J.

34 STEIN, M., Beweisen. Texte zur mathematisch - naturwissenschaftlich - technischen Forschung und Lehre. Band 19. Franzbecker, Bad Salzdethfurt 1986.

35 FREUDENTHAL, H., Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. Oldenburg, München, Wien 1978.

36 TIETZE U.P./KLIKA M./WOLPERS H.: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Vieweg Verlag Braunschweig 1982.

37 PIAGET, J.: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Suhrkamp, Frankfurt/M. 1981.

Piaget versteht unter Operation u.a. eine Handlung, die interiorisiert werden kann, d. h. sie kann ebenso im Denken wie in der äußeren Wirklichkeit ausgeführt werden.

38 KIRSCH A., Beispiele für "prämathematische" Beweise, Seite 261, Fig.1 und Fig. 2. In: Dörfler, W./Fischer R. (Hrsg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Wien 1979.

39 Siehe STEIN 1986

40 AUSUBEL D.P./NOVAK J.D/HANESIAN H., Psychologie des Unterrichts. Beltz Verlag, Weinheim, Basel 1980.

41 STRUVE, R.: Zur Rolle der Anschauung in formalen Beweisen. Zu Erik Stenius "Anschauung und formaler Beweis". Studia Leibnitiana 18, 1986.

42 VOLKERT, K.: Die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik - historisch und systematisch betrachtet. In: KAUTSCHITSCH H.- METZLER W. (Hrsg.), Anschauliches Beweisen. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien - B.G. Teubner, Stuttgart.

43 KAUTSCHITSCH, H.: Wie kann ein Bild das Allgemeingültige vermitteln. In: KAUTSCHITSCH H.- METZLER W. (Hrsg.), Anschauliches Beweisen. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 18. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien - B.G. Teubner, Stuttgart.

44 VOLKERT, K.Th.: Die Krise der Anschauung. Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen 1986.

Name und Anschrift des Autors:
Dr. Wolfgang Ratzinger
Pädagogische Akademie des Bundes
4020 Linz, Kaplanhofstraße 40